www.paedagogische-horizonte.at
Pädagogische Horizonte, 10(1), 2026
https://doi.org/10.17883/pa-ho-2026-01

PÄDAGOGISCHE HORIZONTE

Wenn Mathematisieren scheitert

Fehlerprozesse beim Mathematisieren einer Sachsituation

Iris Jedinger, Lisa-Maria Pilotto, Simon Plangg

Pädagogische Hochschule Salzburg
iris.jedinger@phsalzburg.at; https://doi.org/10.17883/pa-ho-2026-01-01

EINGEREICHT 27 JUN 2025 ÜBERARBEITET 10 JAN 2026 ANGENOMMEN 5 MAR 2026

Mathematisieren, das Beschreiben von realen Situationen mit Hilfe mathematischer Mittel, stellt eine zentrale Kompetenz im Mathematikunterricht dar. Dennoch zeigen Studien, dass Schüler:innen in diesem Bereich teils erhebliche Schwierigkeiten aufweisen. Ziel dieser Studie ist die Analyse möglicher Fehlerursachen und -prozesse bei Mathematisierungsaufgaben. Dazu wurde eine qualitative Untersuchung mit 486 Schüler:innen der 8. Schulstufe an acht Salzburger Schulen durchgeführt. Die Lernenden bearbeiteten eine Aufgabe zum Aufstellen einer Formel für eine gegebene Sachsituation und dokumentierten dabei ihre Gedankengänge und Lösungsschritte. Die Auswertung zeigt, dass sich die Fehlerprozesse auf übergeordnete kognitive und kontextuelle Muster zurückführen lassen. Häufige Ursachen sind die Orientierung an routinierten Verfahren, unzureichendes Operationsverständnis sowie Schwierigkeiten im Umgang mit mathematischen Notationen. Besonders auffällig ist die fehlerhafte Anwendung der Strategie des Rechnens auf eine Einheitsgröße. Die Studie verdeutlicht die Vielfalt möglicher Fehlermuster innerhalb einer einzelnen Aufgabenstellung und betont die Notwendigkeit ihrer systematischen Analyse. Für den Unterricht ergibt sich daraus ein erhöhter Bedarf an diagnostischer Sensibilität und gezielter Förderung durch die Lehrperson.

SCHLÜSSELWÖRTER: Mathematikunterricht, Mathematisieren, Modellbilden, Fehleranalyse, Fehlerprozesse

1. Einleitung und Fragestellung

Das Lehren und Lernen von Mathematik erfordert die Einbindung mathematischer Konzepte in reale Kontexte sowie eine reflektierte Fehlerkultur (Winter, 1995). Die Mathematisierung als essenzieller Prozess überführt reale Modelle in formale mathematische Strukturen (Förster, 1997) und bildet eine zentrale Kompetenz des Modellbildens (Greefrath et al., 2013; Kaiser et al., 2023). Modellbilden umfasst neben dem Mathematisieren auch das vorangehende Problemverstehen, Berechnungen sowie Interpretation und Validierung (Förster, 1997; Kaiser et al., 2023). Die Darstellung von derartigen Modellierungsphasen hilft, die Komplexität zu reduzieren und Teilkompetenzen des Modellierens zu fördern (Blum & Leiss, 2005; Greefrath & Maaß, 2020).

Fehleranalysen ermöglichen wertvolle Einblicke in Denkprozesse von Schüler:innen und dienen der gezielten Förderung (Eichelmann et al., 2012; Fischer & Malle, 2004; Prediger & Wittmann, 2009; Radatz, 1980; Wittmann, 2007a). Das Bewusstsein über Fehlermuster hilft, Fehlvorstellungen präventiv zu begegnen (Führer, 2004). Studien zeigen, dass österreichische Schüler:innen Defizite bei der Interpretation mathematischer Ausdrücke haben (Malle, 1993). Plangg et al. (2022) analysieren in diesem Kontext Fehlermuster bei der Mathematisierung einer Sachsituation aus der Bildungsstandardsüberprüfung Mathematik für die 8. Schulstufe (BIST-Ü M8, 2017) mit österreichweiten Daten, allerdings ohne die Fehlerprozesse systematisch in den Blick zu nehmen. Die Relevanz der Identifikation von Fehlerursachen aufgreifend, ergibt sich darauf aufbauend die folgende Forschungsfrage: Welche Fehlerprozesse liegen den bereits identifizierten Fehlermustern beim Mathematisieren einer Sachsituation aus der Studie von Plangg et al. (2022) zu Grunde?

Um Einblicke in diese Fehlerprozesse zu gewinnen, wurde für diese Studie die Aufgabenstellung aus der BIST-Ü M8 von 2017 durch eine Aufforderung zur Notation der Lösungsschritte und Gedankengänge (vgl. Fischer & Malle, 2004) erweitert. Der vorliegende Beitrag bietet einen Überblick über relevante theoretische Konzepte, beschreibt die aktuelle Studie und präsentiert Ergebnisse mit praktischen Implikationen für Lehrkräfte und die Forschung.

2. Hintergrund

Dieser Abschnitt behandelt zentrale Begriffe im Kontext des Mathematikunterrichts: Mathematisieren, Modellbilden, Grundvorstellungen und Fehlermuster. Zudem wird die vorangegangene Studie von Plangg et al. (2022) näher beschreiben.

2.1 Mathematisieren, Modellbilden

Freudenthal (1977, S. 49) definiert Mathematisieren als „Ordnen der Wirklichkeit auch, wenn es mit mathematischen Mitteln geschieht“. Dieser Prozess umfasst das Erkennen von Mustern und die Anwendung mathematischer Konzepte auf reale Phänomene (Heymann, 1996). Mathematisieren ist ein essenzieller Bestandteil des Modellierens, der als Kompetenz in den Lehrplänen der Sekundarstufe verankert ist (BGBl. II Nr. 1/2009 idF BGBl. II Nr. 262/2023). Modellbildung (siehe Abbildung 1) beinhaltet die Erstellung eines Situationsmodells basierend auf einer Realsituation (1), die Gewinnung eines Realmodells aus dem Situationsmodell (2), die Mathematisierung (3), die Bearbeitung des mathematischen Modells innerhalb der Mathematik (4) sowie die Interpretation und die Validierung der so erhaltenen Resultate (5 und 6) (Blum & Leiss, 2005). Dabei betonen Greefrath et al. (2013) die zentrale Rolle der Mathematisierung im Modellbildungsprozess.

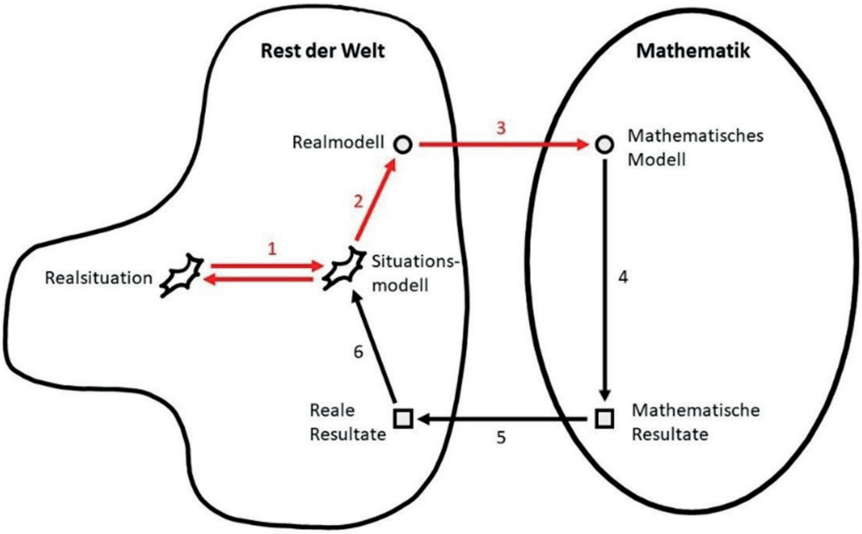

ABB 1 *Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss (2005), Darstellung durch die Autor:innen*

Grundvorstellungen spielen eine zentrale Bedeutung, da sie helfen, mathematische Begriffe bildhaft oder handlungsbezogen zu interpretieren und die Anwendung von mathematischen Konzepten in realen Kontexten zu erleichtern (Blum et al., 2004; vom Hofe & Roth, 2023). Sie machen Mathematik greifbar, indem sie individuelle Lernerfahrungen einbeziehen und ermöglichen es Lehrkräften, Konzepte anschaulich zu vermitteln. Grundvorstellungen sind eine wesentliche Voraussetzung für Modellierungsprozesse (Blum et al., 2004). Vom Hofe und Roth (2023) betonen, dass Grundvorstellungen im Modellierungskreislauf während des Mathematisierens sowie Verarbeitens und Interpretierens erforderlich sind und ihnen somit eine wichtige Rolle bei Modellierungsprozessen zukommt. Sie sind unerlässlich für die Übersetzung eines realen Modells in ein mathematisches Modell, für die Arbeit innerhalb dieses mathematischen Modells und für die Rückübersetzung des mathematischen Modells in die Realität (vom Hofe & Roth, 2023). Mit Bezug zu mathematischen Operationen spricht man auch vom Operationsverständnis. Schulz et al. (2017) definieren Operationsverständnis als die Fähigkeit, reale Situationen in mathematische Operationen zu übersetzen. Dies setzt eine strukturierte Vorgehensweise und die Anwendung von Grundvorstellungen voraus (Schulz et al., 2017).

2.2 Fehlerprozesse, Fehlermuster, Fehler

Nach Oser, Hascher und Spychiger (1999) existieren verschiedene Definitionen des Begriffs „Fehler". Keller (1980, S. 40) beschreibt ihn als „Frustration von Erwartungen", während Gloy (1987, zitiert nach Oser et al., 1999, S. 11) ihn als „Abweichung von individuellen Absichten“ definiert. Meist wird ein Fehler als Abweichung von einer Norm verstanden (Oser et al., 1999). Fehlermuster können durch die Analyse schriftlicher Aufgabenlösungen erkannt werden (Wittmann, 2007a), wenn sie bei mehreren Lernenden gehäuft auftreten (Prediger & Wittmann, 2009). Dabei unterscheidet sich die inhaltlich-deskriptive Klassifizierung eines Fehlers von Fehlerprozessen, die sich auf fehlerhafte Lösungsvorgänge beziehen (Tietze, 1988). Ein Fehlermuster kann somit verschiedene Fehlerprozesse umfassen (Wittmann, 2007b).

Im Mathematikunterricht treten Fehler meist systematisch auf (Gerster & Grevsmühl, 1983; Radatz, 1980; Tietze et al., 1997). Fehlermuster entstehen durch Missverständnisse, falsche Annahmen oder unzureichende Kenntnisse. Ihre Analyse gibt Lehrkräften wertvolle Einblicke in das Denken der Lernenden und hilft bei gezielten Unterrichtsmaßnahmen.

Schüler:innenprodukte wie schriftliche Antworten dienen hierbei oft als Ausgangspunkt zur Identifikation von Fehlermustern (Prediger & Wittmann, 2009). Padberg (1996) unterscheidet drei Fehlerarten: 1) Flüchtigkeitsfehler, die durch Unachtsamkeit entstehen und sofort korrigierbar sind, 2) Systematische Fehler, die wiederholt auftreten und auf mangelndes Verständnis hinweisen, und 3) Typische Fehler, die bei vielen Personen vorkommen und auf systemische Schwierigkeiten in einem gesamten Themenbereich hindeuten.

Hinter den verschiedenen Fehlererscheinungen oder -mustern verbergen sich häufig tiefergehende Fehlerprozesse (Wittmann, 2007b). Die Ursachen für bestimmte Fehlermuster können individuell unterschiedlich und vielfältig sein. Das Hauptziel wissenschaftlicher Fehleranalysen ist es, typische Fehler in einem Themengebiet zu identifizieren und deren Ursachen zu erforschen. Auf diese Weise sollen mögliche Fördermaßnahmen für den Unterricht entwickelt werden (Eichelmann et al., 2012). Die hier analysierten Fehler fallen in die Kategorie der typischen Fehler.

2.3 Ergebnisse aus Plangg et al. (2022)

Die Studie von Plangg et al. (2022) analysiert eine Mathematisierungsaufgabe der BIST-Ü M8 anhand von 4.000 Schüler:innenantworten aus Österreich. Das dazu verwendete Item „Erdbeeren“ (siehe im Folgenden) erfordert die Mathematisierung einer Realsituation und somit das Durchlaufen wesentlicher erster Schritte des Modellierungskreislaufs[1] (siehe Abschnitt 2.1).

1 Eine detaillierte Ausführung der einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufes hinsichtlich der Bearbeitung dieses Items findet sich in Plangg et al. (2022).

Verena hat 12 kg selbstgepflückte Erdbeeren und möchte diese am Markt verkaufen. Sie weiß noch nicht, wie viel sie pro Kilogramm verlangt, deshalb will sie eine Formel aufstellen. Statt eines fixen Preises pro Kilogramm schreibt sie p €.
Mit welcher Formel kann Verena die Einnahmen (E) berechnen?
Schreibe in das Kästchen.
$E = \boxed{}$

Die Lösungserwartung für dieses Item lautet: $12 \cdot p$.

Die Untersuchung identifiziert acht häufige Fehlermuster, die in der unten angeführten Tabelle mit beispielhaften Formulierungen und ihrem jeweiligen prozentualen Auftreten in der untersuchten repräsentativen Stichprobe dargestellt sind (Plangg et al., 2022).

TAB. 1 *Prototypisches Beispiel und prozentueller Anteil für die acht am häufigsten aufgetretenen Fehlermuster (Plangg et al., 2022, S. 268)*

	Fehlermuster	**Beispiel**	**Prozent**
1	Unbestimmte im Nenner	$12 : p$	22,2
2	kg statt 12	$\mathrm{kg} \cdot p$	20,2
3	Unbestimmte im Zähler	$p : 12$	6,7
4	x oder x und Einheit statt Zahl	$x \cdot p$	6,4
5	Prozent im weiteren Sinn	$G \cdot p : 100$	6,0
6	Rechnung	$12 : 2$	5,9
7	Einheit und Zahl statt 12	$1\,kg \cdot p$	3,4
8	x als Unbestimmte	$12 \cdot x$	3,0

Während Plangg et al. (2022) Hypothesen zu den Fehlerursachen formulieren, bleibt die systematische Analyse der Fehlerprozesse weitestgehend offen, da die Lösungsschritte und Gedankengänge der Schüler:innen bei den Bildungsstandardsüberprüfungen nicht systematisch erhoben wurden, sondern lediglich beispielhaft und eher zufällig von den Schüler:innen am Angabeblatt festgehalten wurden.

Zusammenfassend zeigt die Studie, dass eine vertiefte Auseinandersetzung mit den Fehlermustern und deren Ursachen notwendig ist, um die Mathematisierungskompetenzen von Schüler:innen gezielter entwickeln zu können. Aus diesem Grund ist eine weitere vertiefende Untersuchung, in welcher systematisch die notierten Lösungsschritte und Gedankengänge der Schüler:innen erhoben und analysiert werden, notwendig.

3. Methodik

3.1 Stichprobe und Sampling

In der vorliegenden Studie wurden 486 Schüler:innen der 8. Schulstufe im Zeitraum April 2024 bis Januar 2025 im Bundesland Salzburg getestet. Es erfolgte eine gezielte Auswahl an Schulen auf der Grundlage von Schultypen (AHS und MS) sowie der geographischen Lage (städtisch und ländlich). Insgesamt wurden fünf Mittelschulen (drei in Salzburg Stadt) sowie drei Gymnasien (eines in Salzburg Stadt) ausgewählt.

TAB. 2 *Verteilung von Geschlecht und Schultyp in der Stichprobe*

Merkmal	Absolute Häufigkeit (n = 486)	Relative Häufigkeit
Geschlecht		
Männlich	252	51,85 %
Weiblich	226	46,50 %
Divers	6	1,23 %
Keine Angabe	2	0,41 %
Schultyp		
AHS	275	56,58 %
MS	211	43,42 %

Zur Sicherstellung der Vergleichbarkeit der erhobenen Daten und somit der Gewährleistung möglichst identer Durchführungsbedingungen wurde einer detaillierten Ablaufbeschreibung für die Erhebung gefolgt. Mit Ausnahme einer Klasse wurden sämtliche Erhebungen von mindestens einer Person aus dem Autor:innenkollektiv geleitet.

3.2 Erhebungsinstrumente

Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, wurde das Item „Erdbeeren“ aus den BIST-Ü M8 (2017) verwendet. Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgte schriftlich und in gedruckter Form. Um einen Einblick in die Denk- und Fehlerprozesse der Schüler:innen zu erhalten, wurde die Aufgabenstellung in Anlehnung an Fischer und Malle (2004) folgendermaßen erweitert:

Schreibe hier alle deine Lösungsschritte und Gedankengänge auf:

Das Antwortfeld umfasst bei dem verwendeten Erhebungsinstrument nach der Aufgabenstellung des Items „Erdbeeren" (siehe Abschnitt 2.3) den gesamten verbleibenden Bereich der A4-Seite. Zur Vermeidung von Unklarheiten hinsichtlich der Erweiterung der Aufgabenstellung und für möglichst detaillierte und qualitätvolle Verschriftlichungen seitens der Schüler:innen wurde eine Vorübung[2] zum „Lauten Denken" bearbeitet und im Plenum besprochen. Anschließend folgte die Bearbeitung des Items *Erdbeeren* und der Erweiterung mit einer fixen Zeitvorgabe von sieben Minuten.

3.3 Prozessierung und Auswertung der Daten

Aufgrund fehlender Bearbeitung der Aufgabenstellung wurden 6 Fälle entfernt. In einem weiteren Fall konnte der Bearbeitung kein eindeutiges Fehlermuster zugeordnet werden, dieser wurde daher für die weitere Analyse ausgeschlossen. Insgesamt wird somit ein Datensatz mit 479 Bearbeitungen als Grundlage für die vorliegende Studie herangezogen. Die Verteilung von *Geschlecht* sowie *Schultyp* (AHS, MS) in der Stichprobe und einhergehender *Lösungshäufigkeiten* können der Tabelle 3 entnommen werden. Die Lösung des Items wurde als *eigentlich richtig* gewertet, wenn die Formel mit Einheiten (z. B. $E = 12\,kg \cdot p\,€$) angegeben oder das neutrale Element bezüglich der Multiplikation (z. B. $E = 1 \cdot 12 \cdot p$) zusätzlich in die Formel integriert wurde.

TAB 3 *Merkmale des Datensatzes sowie Lösungshäufigkeiten*

Merkmal	Stichprobe (n)	Bearbeitung falsch	Bearbeitung eigentlich richtig	Bearbeitung richtig
Gesamt	479	55,74 %	20,04 %	24,22 %
Geschlecht*				
Männlich	249	53,41 %	20,08 %	26,51 %
Weiblich	223	57,85 %	19,73 %	22,42 %
Schultyp				
AHS	272	38,24 %	28,68 %	33,09 %
MS	207	78,74 %	8,7 %	12,56 %

**Da nur 1,46 % der Stichprobe (7 Schüler:innen) divers oder keine Information bezüglich ihres Geschlechts angaben, werden diesbezügliche Kennzahlen nicht angeführt.*

Die Auswertung der Bearbeitungen erfolgte deduktiv nach dem Kategoriensystem der Fehlermuster nach Plangg et al. (2022). In einer ersten Phase codierten die Autor:innen je ein Drittel der Gesamtbearbeitungen unabhängig voneinander

2 Vorübung: Du deckst den Mittagstisch. Es kommen fünf Personen zum Essen. Schreibe hier alle deine Arbeitsschritte und Gedankengänge auf.

anhand eines Codierleitfadens. Anschließend erfolgte zur Validierung ein konsensualer Codierungsschritt, in welchem sämtliche Antworten im Autor:innenkollektiv diskutiert und gegebenenfalls angepasst wurden. Basierend auf diesen Ergebnissen wurden diese Bearbeitungen für die bekannten Fehlermuster hinsichtlich möglicher Fehlerprozesse inhaltlich analytisch ausgewertet. In einer abschließenden Phase erfolgten eine Rückmeldung und Diskussion der Ergebnisse aus dieser Analyse mit insgesamt vier Lehrkräften einer Schule aus der Stichprobe. Im Zuge dessen wurden die Codierungen von drei ausgewählten Fehlermustern (*Unbestimmte im Nenner*, *kg statt 12*, *Rechnung*) anhand der Aufgabenbearbeitungen kommunikativ validiert. Primär wurden hierfür Schüler:innenantworten der betreffenden Schule herangezogen.

Die Datenaufbereitung sowie Datenprozessierung erfolgte mithilfe der Statistiksoftware R[3].

Bei sämtlichen Bearbeitungen mit notierten Lösungsschritten und/oder Gedankengängen, welche im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung standen, wurde unterschieden, ob sie Rückschlüsse auf mögliche Fehlerprozesse zulassen oder nicht. Bearbeitungen, die nur Fragmente des Lösungs- bzw. Gedankenvorgangs enthielten oder einen Widerspruch zur gegebenen Antwort darstellten, wurden für die weitere Analyse nicht herangezogen. Die entsprechenden Häufigkeiten dazu werden im Ergebnisteil bei jedem einzelnen Fehlermuster gesondert berichtet. Bei den einzelnen Bearbeitungen sind Mehrfachkodierungen bezüglich der identifizierten Fehlerprozesse möglich. Die im Ergebnisteil berichteten Zitate von Schüler:innen stellen Ausschnitte der notierten Lösungsschritte und Gedankengänge dar. Umgangssprachliche Ausdrücke in den Äußerungen der Schüler:innen wurden dem Standarddeutschen angepasst.

4. Ergebnisse

In der vorliegenden Stichprobe konnten sämtliche der von Plangg et al. (2022) berichteten Fehlermuster beim Mathematisierungsprozess bei der Lösung des besagten Items erneut festgestellt werden. Die prozentuelle Häufigkeit ist jedoch hinsichtlich der Repräsentativität der Stichprobe nicht mit jener von Plangg et al. (2022) vergleichbar. Außerdem konnten durch die notierten Gedankengänge der Schüler:innen Fehlermuster präziser zugeordnet werden. Der Fokus liegt jedoch nicht auf der Häufigkeit der Fehlermuster, sondern auf den zugrundeliegenden Fehlerprozessen, wodurch in dieser Studie besonders die Anzahl und die Qualität der notierten Gedankengänge relevant sind (siehe Tabelle 4). Mehrfachcodierungen sind möglich.

---

3 https://www.r-project.org/

TAB. 4 *Häufigkeit des Fehlermusters sowie einhergehende Anzahl notierter Gedankengänge in Zusammenhang mit der Aufgabenstellung*

	Fehlermuster	Beispiel	Anzahl	Prozent*	Notierte Gedankengänge
1	Unbestimmte im Nenner	$12:p$	34	9,37	26
2	kg statt 12	$kg \cdot p$	47	12,95	46
3	Unbestimmte im Zähler	$p:12$	13	3,58	10
4	x oder x und Einheit statt Zahl	$x \cdot p$	9	2,48	8
5	Prozent im weiteren Sinn	$(12+100)/100$	4	1,1	4
6	Rechnung	$12:12$	27	7,44	26
7	Einheit und Zahl statt 12	$1\,kg \cdot p$	4	1,1	4
8	x als Unbestimmte	$12 \cdot x$	8	2,2	8

** in Bezug auf die gesamte Stichprobe*

Im Folgenden werden die Ergebnisse zu den einzelnen Fehlermustern, insbesondere die zugehörigen festgestellten Fehlerprozesse, präsentiert. Die Reihenfolge ist ident mit jener aus Tabelle 4 und entspricht jener aus Plangg et al. (2022).

4.1 Fehlermuster Unbestimmte im Nenner

Das Fehlermuster *Unbestimmte im Nenner* kommt in der vorliegenden Stichprobe am zweithäufigsten vor (34 Fälle, 9,37 %). Die häufigsten Antworten sind $12:p$ bzw. $12/p$ und $12/p$ €. In 26 der 34 erfassten Fälle wurden Gedankengänge und Arbeitsschritte in Zusammenhang mit der Aufgabenstellung von den jeweiligen Lernenden verfasst, davon sind 10 so formuliert, dass sie Rückschlüsse auf mögliche Fehlerprozesse zum genannten Fehlermuster liefern.

In sieben Fällen versuchen die Lernenden einen Preis für ein kg bzw. pro kg zu bestimmen.

> *ID 185: „Ein Kilogramm kostet p Euro und wenn sie 12 kg hat muss man die 12 kg durch p berechnen, weil man dann den Preis für ein kg hat"*

In einem Fall geht hervor, dass ein unbekannter Preis pro kg für den/die Lernende:n eine ungewohnte Situation ist.

ID 24: „Aufgabe ist komisch … wenn man nicht weiß, wie viel man pro Kilo verlangt", Argumentiert Division: „weil wenn man 12 durch p macht, dann weiß man, wie viel 1 kg kostet"

Ein Fall erklärt die Division sowie die Variable p folgendermaßen:

ID 485: „Sie will berechnen wie viel kg es kostet, wenn sie 12 kg hat, das heißt sie muss es dividieren, p steht für pro Kilogramm"

In folgendem Einzelfall wird angeführt, dass die 12 kg in Euro aufzuteilen sind.

ID 425: „12 kg Erdbeeren, 12 kg in Euro aufteilen, 12 kg : p = E"

In einem weiteren Fall wird angegeben, dass eine Menge von den 12 kg abgezogen werden muss.

ID 337: „Ich habe mir gedacht, wenn sie von den 12 kg eine gewisse Menge abzieht"

4.2 Fehlermuster kg statt 12

Unter den acht untersuchten Fehlermustern (Tab. 4) tritt das Fehlermuster *kg statt 12* am häufigsten auf (47 Fälle, 12,95 %). Die meistgenannten Antworten sind $kg \cdot p$ bzw. $p \cdot kg$ und $kg \cdot p$ € bzw. p € $\cdot\, kg$. In 46 der 47 Fälle wurden Gedankengänge bzw. Arbeitsschritte im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung notiert, wovon 31 Rückschlüsse auf zugrundeliegende Fehlerprozesse ermöglichen.

In acht Fällen wird von den Lernenden die Menge variabel aufgefasst.

*ID 227: „Ein Kilogramm kostet p Euro deshalb kosten zwei kg 2p Euro und 3 kg 3p Euro usw. Also kg*p €."*

In weiteren acht Fällen wird die Menge ebenfalls als variabel aufgefasst, jedoch geht zusätzlich aus der Bearbeitung hervor, dass „kg" als Variable für die *verkaufte Menge* verwendet wird.

*ID 439: „E = p*kg, p = Preis pro Mengeneinheit (2€/kg oder 3€/kg etc.), kg = verkaufte Menge, E = Einnahmen"*

In neun Fällen spiegelt sich die Lösung der Lernenden in einer umgangssprachlichen Formulierung oder in der Verwendung von Wortvariablen wider.

ID 150: „Einnahmen sind kg mal Preis pro Kilogramm"

*ID 242: „Ich denke, Preis*Kg wäre logisch, aber irgendwie auch nicht. […] p €* kg sieht gut aus“*

Zwei Fälle zeigen dazu explizit den Einsetzungsaspekt bei Verwendung von „kg“ als Variable auf.

ID 228: „Bei der Erstellung der Formel muss ich zuerst die 12 kg Erdbeeren, danach den Erlös in p Euro einfügen. Dann kommt die obige Formel heraus“ [Lösung: E = p[€] · [kg]]

In einem Fall wird „kg“ als abhängige Variable verwendet.

*ID 40: „pro ein € bekommst du kg viele Erdbeere“, „ein € = 250 g Erdbeeren; 2€ = 500g“, „Das heißt E = 8€ * 2kg; E = 16€“ [Lösung: E = p € · kg]*

Ein:e Schüler:in variiert sowohl die Menge als auch den Preis innerhalb einer Bearbeitung bei der Beachtung eines Mengenrabatts.

ID 103: „Sie macht vielleicht Angebote“ „z. B. 1 kg = 4 €; 3kg = 10 €“

Ein gemeinsames Merkmal der bislang nicht genannten Bearbeitungen besteht in der zusätzlichen Angabe eines konkreten Beispiels, was insgesamt von fünf Lernenden angeführt wurde.

ID 70: „E = 10 € · 10 kg = 100; E = p · kg“

Dieses Fehlermuster trat in der vorliegenden Stichprobe tendenziell bei leistungsstärkeren Schüler:innen auf (27 der 47 Fälle besuchten eine AHS, 38 der 47 Fälle werden nach AHS-Standards im Unterricht beurteilt).

4.3 Fehlermuster Unbestimmte im Zähler

Das Fehlermuster *Unbestimmte im Zähler* tritt in der vorliegenden Stichprobe 13-mal (3,58 %) auf. Mehrmals wird die Antwort $p:12$ bzw. $p/12$ sowie $p\,€:12\,kg$ angegeben. Weitere Varianten sind unter anderem $p:kg$ bzw. $p\,€/kg$. In zehn der 13 Fälle wurden Gedankengänge bzw. Arbeitsschritte im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung notiert, wovon sieben Antworten Rückschlüsse auf Fehlerprozesse ermöglichen.

Vier Antworten geben Unsicherheiten bezüglich der korrekten Operation an, wobei zwei Antworten explizit zwischen der Verwendung der (korrekten) Multiplikation oder einer Division schwanken:

*ID 257: „Das heißt p Euro * 12 weiß ich nicht […] Was ist p Euro. Vielleicht $p : 12 = E$“*

ID 463: „oder $E = 12 * p$ €. Ich weiß es nicht“

Zwei Fälle zeigen ein Bestreben zur Bestimmung des Kilopreises auf:

ID 461: „Wenn sie den Preis von 12 kg weiß wäre es einfach die Rechnung würde lauten z. B. « 20 € : 12 = … » aber man muss zuerst den Preis von 12 kg berechnen“ [Lösung: p € : 12 kg]

ID 122: „1 kg Erdbeeren = p€“, „12 kg = p €“, Umformung der Gleichung zu „1 kg = p/12 €“

In einem weiteren Fall wird mit einem Beispiel zudem eine konkrete Berechnung durchgeführt:

ID 98: „p = 24“, „E = 24:12“, „E = 2 €“

4.4 Fehlermuster x oder x und Einheit statt Zahl

Das Fehlermuster *x* oder *x und Einheit statt Zahl* kommt in neun Fällen (2,48 %) der vorliegenden Stichprobe vor. Die häufigsten Antworten sind $p \cdot x$ bzw. $x \cdot p$ sowie Varianten dieser Antwort mit zusätzlichen Einheiten (bspw. p € $\cdot\, x$ oder $p \cdot x$ *kg*). In acht der neun Fälle wurden von den Lernenden sinnvolle Gedankengänge bzw. Arbeitsschritte notiert – wovon sieben so formuliert sind, dass Rückschlüsse auf potentielle Fehlerprozesse ermöglicht werden.

In sechs Antworten wird von den Schüler:innen explizit erklärt, was die Variable x ausdrückt. Zwei davon nennen das Gewicht, zwei Antworten die Anzahl und eine Antwort gibt x als Variable für die verkaufte Menge an:

ID 246: „Wenn Verena eine beliebige Menge verkaufen möchte muss sie einfach den Preis p Euro mit dem Gewicht x multiplizieren“

ID 226: „Um das Einkommen zu berechnen braucht man die Anzahl x […]“

ID 323: „x = verkauftes kg […] verkauftes : ges.Preis = Einnahmen“ [Lösung: x : p € (gesamt)]

In einem Fall wird zudem in die Konsument:innenperspektive gewechselt:

ID 42: „weil x ist wie viel man will“ [Lösung: $E = x \cdot p$]

In zwei Fällen geht aus den Notizen hervor, dass die Variable x aus einer Korrektur der eigentlichen Lösungserwartung hervorgeht:

> *ID 248: „Der Preis mal die Anzahl = E“*, S notiert zuerst 12 · p Euro, streicht 12 durch und ergänzt stattdessen x.

4.5 Fehlermuster Prozent im weiteren Sinn

Das Fehlermuster *Prozent im weiteren Sinn* tritt insgesamt in vier Fällen (1,1 %) auf. Alle Antworten inkludieren entweder die Zahl 100 als Faktor (bspw. $\frac{12}{50\,€} \cdot 100$) oder als Divisor (bspw. $\frac{12+100}{100}$). Obwohl alle vier Antworten sinnvolle Gedankengänge oder Arbeitsschritte inkludieren, lassen sich Fehlerprozesse kaum rekonstruieren. Drei Fälle liefern eine Erklärung für die angegebene Lösung.

Das letztgenannte Beispiel tritt zweimal auf. Zwei Antworten gleichen sich in der Intention, den Kilopreis zu bestimmen:

> *ID 128: „(12+100)/100 = 13“, „A = 13 pro einem Kilogramm“*

> *ID 5: „weil so berechnet man p € und für 1 Kilo 13 € ist ein guter Preis“*

In einer Antwort befindet sich eine explizite Erklärung für das Anwenden der Prozentrechnung:

> *ID 291: „Ich weiß nicht deswegen hab‘ ich irgendwas geschrieben, dass sie ihre 12 kg an 50 Personen verkauft und das denn mal 100 für %.“*

4.6 Fehlermuster Rechnung

Das Fehlermuster *Rechnung* tritt in 27 Fällen (7,44 %) auf. Im Vergleich aller Antworten bei diesem Fehlermuster wird keine Antwort häufiger als dreimal genannt. Beispiele für Antwortmöglichkeiten sind 12 : 12, 1 : 12 = 0,11 oder 12 : 12 + 1 · 8 = 8 €. Vier Fälle wurden bereits im Abschnitt zuvor (*Prozent im weiteren Sinn*) betrachtet. Von den restlichen 23 Bearbeitungen wurden in 22 Fällen Gedankengänge oder Arbeitsschritte in Zusammenhang mit der Aufgabenstellung angeführt, wovon 20 Bearbeitungen Erklärungen für mögliche Fehlerprozesse liefern.

In neun Fällen wird von den Lernenden erläutert, dass ein Kilopreis für die Berechnung festgelegt wird.

> *ID 353: „Ich habe einen Preis überlegt. Danach habe ich eine Formel aufgestellt und dann ausgerechnet was ihr Gewinn wäre“ [Lösung: 12 · 5 = 60 €]*

ID 6: Schüler:in legt einen Kilopreis fest (3 €) und beginnt tabellarisch aufzulisten: 1 = 3 €, 2 = 6 €, 3 = 9 €, 4 = 12 € [Lösung: 1 · 3]

In elf Bearbeitungen wird eine Rechnung mit der Struktur einer Division durchgeführt, wobei in jeder Rechnung die Zahl 12 (oder ein Vielfaches davon) entweder als Divisor oder Dividend verwendet wird. Davon versuchen die Lernenden in vier Antworten den Kilopreis auszurechnen:

ID 478: S führt schriftliche Divisionen für die Rechnungen „1000 : 12 = 8,16“ und „12000 : 1000 = 12“ durch; „Pro kg verlangt sie 8,16 €“

Zwei Lernende geben als Begründung an, sich ein Kilogramm zu berechnen.

ID 7: „Man rechnet 12 kg durch die 12 kg um 1 kg rauszubekommen“ [Lösung: 12 : 12 = 1 kg]

In einer Antwort wird die Division mit einer fairen Aufteilung argumentiert:

ID 177: „12 selbstgepflückte Erdbeeren; man könnte die 12 durch 2 rechnen damit es *fair bleibt also damit man dann die Hälfte hat also wäre es 6 und durch jedes Kilo pro die Hälfte weg oder dazu rechnen“ [Lösung: 12 : 2 = 6 €]*

Die restlichen vier Lösungen mit einer Division liefern keine verbalen Erklärungen für den Rechenvorgang, zeigen jedoch anhand der notierten Arbeitsschritte das Bestreben auf, die notierte Rechnung mit einer schriftlichen Division zu lösen:

ID 321: „12000 : 5 =“

4.7 Fehlermuster Einheit und Zahl statt 12

Das Fehlermuster *Einheit und Zahl statt 12* tritt in der vorliegenden Stichprobe in vier Fällen (1,1 %) auf. Davon sind drei Lösungen nahezu identisch (1 *kg* · *p* € bzw. *p* · 1 *kg*). Die vierte Lösung lautet 1/2 *kg* · 3 € und lässt sich dem Abschnitt zuvor (Fehlermuster *Rechnung*, also der Festlegung eines Kilopreises) zuordnen. Drei Bearbeitungen enthalten Anmerkungen zu den Gedankengängen bzw. Arbeitsschritten, von denen zwei Rückschlüsse auf Fehlerprozesse ermöglichen.

Zwei Schüler:innen erklären die – hier übliche – Zahl 1 folgendermaßen:

*ID 69: „p * 1 kg, da man den Preis mal die einzelne Menge rechnet“*; anschließend gibt er/sie ein korrektes Beispiel mit konkreten Werten für 2 kg bei einem Kilopreis von 3 € an. *[Lösung: p · 1 kg]*

ID 451: „Erdbeeren = 12 kg, Preis = p €, für 1 kg verlangt Verena p €, das heißt für 12 kg verlangt sie so und so viel €" [Lösung: 1 kg · p €]

Antworten mit einer zusätzlichen Operation

Das vermehrte Auftreten der Ziffer 1 in Kombination mit der Einheit „kg" spiegelt sich in jenen Bearbeitungen wider, welche in der Antwort eine zusätzliche Rechenoperation aufweisen. Innerhalb dieser Antworten wird sieben Mal die Variable p mit der Ziffer 1 bzw. mit „1 *kg*" multipliziert.

Davon geben vier Antworten, die *eigentlich richtige* Lösung mit einer Klammer über der Multiplikation von 1 (*kg*) und p (€) an. Diese Vorgehensweise wird folgendermaßen erklärt:

ID 112: „Muss erst ein Kilogramm ausrechnen um dann 12 kg zu berechnen" [Lösung: (1 · p) · 12]

*ID 230: „Ich habe mir gedacht, dass sie ja 12 kg und sie pro kg p Euro verlangt, dass sie ihre bisherigen 12 kg mal den 1 * kg und dem Preis p Euro rechnet daher 12 kg · (1 kg · p €) = E"*

Jene:r Schüler:in, welche:r keine Klammer angab [E = 1 *kg* * p * 12], erklärt die Lösung folgendermaßen:

*ID 57: „Wenn 1 p ein kg ist muss 12 kg = 12 p sein. Die Einnahmen sind kg * p * 12"*

4.8 Fehlermuster x als Unbestimmte

Das Fehlermuster *x als Unbestimmte* tritt insgesamt in acht Fällen (2,2 %) auf. Am häufigsten wird dabei die Lösung $12 \cdot x$ bzw. $x \cdot 12$ angegeben. In allen Fällen wurden von den Lernenden Gedanken bzw. Arbeitsschritte in Zusammenhang mit der Aufgabenstellung festgehalten, von denen sechs Rückschlüsse auf zugrundeliegende Fehlerprozesse zulassen.

Bei sechs Schüler:innen wird deutlich, dass die Aufgabe im Wesentlichen verstanden wurde und der Fehler bei der formalen Notation entstand.

ID 373: „x = das Geld, das sie pro Kilogramm verlangt, 12 = weil sie hat 12 Kilogramm, € = die Summe, die sie dann einnimmt" [Lösung: x · 12 = €]

*ID 200: „Habe die Formel E = 12*p aufgestellt, weil 12 die Kilo sind und p der Preis, wie x" [Lösung: 12 · p = x]*

Fünf Lernende führen explizit die Bedeutung der Variable x an (z. B. ID 373).

5. Interpretation und Diskussion

5.1 Unbestimmte im Nenner

Die Ergebnisse und Kommentare zu den Bearbeitungen zum Fehlermuster *Unbestimmte im Nenner* (siehe 4.1) weisen darauf hin, dass einige Schüler:innen beabsichtigen, den Preis für ein Kilogramm Erdbeeren zu bestimmen.

Dieses Bestreben kann in einer ersten möglichen Leseart darauf zurückgeführt werden, dass eine für die Schüler:innen ungewohnte Situation vorliegt, in welcher der Preis pro Kilogramm unbekannt ist (siehe 4.1, ID 24). Im Regelfall ist der Preis pro Kilogramm gegeben und die verkaufte Menge variabel. Die Schüler:innen deuten die Aufgabenstellung um und bestimmen den Kilopreis, um weiter arbeiten bzw. rechnen zu können. Es wird folglich ein für sie „gewohnter" Aufgabenkontext hergestellt.

Eine weitere mögliche Ursache für das Bestreben, den Kilopreis zu bestimmen, könnte darin liegen, dass im Kontext von derartigen Aufgaben die Berechnung des Kilopreises in vielen Fällen der erste Schritt in der Problemlösung darstellt, um dann damit gegebenenfalls ausrechnen zu können, wie viel eine bestimmte Anzahl an Kilogramm kostet.

In beiden Fällen umfasst die Strategie „Rechnen auf 1 kg" die Division als erste Rechenoperation, die dann mit den Angaben 12 und p zur Division $12 : p$ führt. Die Anwendung dieser Strategie ist bei der vorliegenden Sachsituation allerdings nicht angemessen. Hier liegt ein Zusammenhang mit der Anwendung eingeübter Lösungsstrategien im Sinne regelhafter Verfahren (Hafner, 2012) nahe.

Die Verwendung einer mathematischen Operation, die der Sachsituation nicht angemessen ist, bezeichnet Hafner (2012) als Zuordnungsfehler. Dieser Fehlerprozess äußert sich auch in den Bearbeitungen jener Schüler:innen, die die Menge „aufteilen" (ID 425) oder etwas von der Menge „abziehen" (ID 337) möchten. Beide Handlungsvorstellungen können mit der Division in Verbindung gebracht werden (Padberg & Büchter, 2015), sind in der beschriebenen Sachsituation jedoch nicht angemessen.

5.2 Unbestimmte im Zähler

Die Ergebnisse des Fehlermusters *Unbestimmte im Zähler* (Abschn. 4.3) lassen ebenfalls darauf schließen, dass die Lernenden häufig versuchen, den Kilopreis zu bestimmen. Ein wesentlicher Bestandteil in diesem Fehlerprozess könnte die Auffassung der Variable p als Preis für die gesamte Menge sein. So wird beispielsweise die Gleichung $12\,kg = p\,€$ durch die Intention zur Bestimmung des Kilopreises zu $1kg = \frac{p}{12}€$ umgeformt (vgl. ID 122). Die Auffassung der Variable p als Preis für die gesamte Menge kann ebenfalls zugrunde liegen, wenn die Gesamteinnahmen angenommen und anschließend durch 12 dividiert werden (ID 461). Dies bestätigt in dem Erklärungsmodell von Plangg et al. (2022) den fehlerhaften Ansatz für eine Schlussrechnung, dennoch geht aus den Kommentaren keine tatsächliche Durchführung eines Schlusses hervor.

Einen weiteren Einblick in die Entstehung dieses Fehlers liefern jene Bearbeitungen, welche Unsicherheiten hinsichtlich der Verwendung der Rechenoperation aufweisen. Jene Schüler:innen äußern in den Kommentaren verschiedene Möglichkeiten für eine Formel und schwanken primär zwischen der Lösungserwartung $E = 12 \cdot p$, und der schlussendlich finalisierten Antwort $E = p : 12$. Diese Ambivalenz in der Zuordnung der mathematischen Operation zu der gegebenen Sachsituation kann auf wenig tragfähige Grundvorstellungen bezüglich der mathematischen Operationen zurückgeführt werden. Analog zum vorhergehenden Fehlermuster scheint hier erneut ein Zuordnungsfehler der mathematischen Operation (Hafner, 2012) zu passieren.

5.3 Rechnung, Prozentrechnung

Die Ergebnisse des Fehlermusters *Rechnung* (Abschn. 4.6) lassen darauf schließen, dass einige Lernende in einem ersten Schritt der Bearbeitung einen konkreten Kilopreis festlegen. Anschließend wird das Resultat dieser Entscheidung entweder verwendet, um den Gewinn (bei 12 verkauften Kilogramm) zu bestimmen (vgl. ID 353) oder um eine proportionale Zuordnung darzustellen (vgl. ID 6).

Die Festlegung eines konkreten Preises kann auf ein operationales Verständnis des Gleichheitszeichens zurückgeführt werden. Dabei interpretieren Schüler:innen das Gleichheitszeichen als ein rechnerisches „Tu etwas"-Signal anstelle eines relationalen Zeichens für Gleichungen bzw. Ausdrücke im Sinne der Äquivalenz (Kieran, 2022). Tietze (1988) führt in diesem Kontext an, dass sich Lernende in der Erwartung eines „geschlossenen" Ergebnisses befinden. Dies bezeichnet einen Ausdruck, der entweder eine Zahl oder ein Term ohne explizit sichtbare Operationszeichen ist. Diese Erkenntnisse vertiefen die Vermutung von Plangg et al. (2022) hinsichtlich der Auswirkungen spezifischer Aufgabenmerkmale. Insbesondere wird hier das „alleinstehende" Gleichheitszeichen „E =" angesprochen. Im Schritt der Validierung der identifizierten Fehlerprozesse mit den Lehrpersonen einer Schule blieb dies jedoch weitgehend unbeachtet. Ihrer Auffassung nach führte primär der Begriff „Einnahmen" in der Aufgabenstellung zur Strategie einer konkreten Berechnung, da Schüler:innen diesen Begriff mit einer Zahl (und nicht mit einer Formel) verknüpfen.

Ein gemeinsames Merkmal weiterer Bearbeitungen, die dieses Fehlermuster aufweisen, besteht in einer Antwort mit der Struktur einer Division sowie dem Auftreten der Zahl 12 (oder eines Vielfachen davon). Diese Antworten liefern keine tiefergehenden Einblicke in die zugrundeliegenden Fehlerprozesse für die konkrete Entscheidung zur Division – einzelne Antworten der Lernenden geben jedoch bereits diskutierte Aspekte zur Grundvorstellung dieser Rechenoperation wieder. Beispiele dafür sind das Bestreben, den Kilopreis zu bestimmen (vgl. ID 478) oder etwas zu verteilen (vgl. ID 177). Ein wesentlicher Unterschied zu anderen Fehlermustern mit der Struktur einer Division (z. B. *Unbestimmte im Zähler*) ist das Nichtvorhandensein einer Variable. Dadurch wird eine tatsächliche Berechnung möglich, welche von den Schüler:innen meist in der Form eines schriftlichen Algorithmus durchgeführt wird.

Die Vorgehensweise dieser Schüler:innen weist Parallelen zur Bearbeitung sogenannter Kapitänsaufgaben[4] (vgl. Baruk, 1989) im Mathematikunterricht der Primarstufe auf. Dabei werden unlösbare Aufgaben (aufgrund fehlender Information) durch die Verknüpfung irrelevanter Zahlen „gelöst". Dies lässt sich auf ein mechanisches Vorgehen bei der Bearbeitung von Sachaufgaben zurückführen, bei welchem der Kontext ausgeblendet wird (Selter, 1994). Analog dazu könnte bei diesem Fehlerprozess ein Bestreben der Schüler:innen, etwas schematisch – mit den gegebenen Zahlen – auszurechnen, mitwirken. Unterstützt wird diese Annahme durch die Verwendung der Zahl 12 sowie einer ihrer Vielfachen. Als Ursache für dieses Verhalten werden häufig Erfahrungen im Kontext des Mathematikunterrichts – und daraus resultierend die Erwartung einer rechnerischen Lösung – gesehen (Franke & Ruwisch, 2010).

Jene Bearbeitungen, welche innerhalb des Fehlermusters *Rechnung* auftreten und – im Kontrast zum Erklärungsmodell zuvor – keinen Preis festlegen, treten ausschließlich in Mittelschulen auf. Von den insgesamt 18 derartigen Bearbeitungen liegen in jeder Mittelschule dieser Stichprobe mindestens zwei Bearbeitungen vor. 50 % von diesen wurden nach AHS-Standards beurteilt.

Die Ergebnisse zum Fehlermuster *Prozent im weiteren Sinn* (Abschn. 4.5) weisen ebenfalls auf ein Bestreben der Schüler:innen hin, eine konkrete Berechnung durchzuführen. Aufgrund des Auftretens der Zahl 100 im Zähler oder Nenner der Rechnung könnte bei dem zugrundeliegenden Fehlerprozess die Vorstellung einer Prozentrechnung mitwirken. Analog zur zuvor beschriebenen Strategie werden hier irrelevante Informationen miteinander verknüpft. Das Ausführen des vom Kontext losgelösten Schemas der Prozentrechnung könnte auf zahlreiche eingeübter Lösungsstrategien im Sinne regelhafter Verfahren (Hafner, 2012) zurückzuführen sein. Da insgesamt nur vier derartige Bearbeitungen vorliegen, sind keine weiteren Einblicke in dieses Fehlermuster möglich.

4 Die Namensgebung dieses „Aufgabentyps" lässt sich auf die folgende gegebenen Sachsituation von Baruk (1989, S. 29) zurückführen: „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?"

5.4 Einheit und Zahl statt 12

Die Ergebnisse des Fehlermusters *Einheit und Zahl statt 12* (Abschn. 4.7) zeigen, dass vorrangig die Zahl 1 in Kombination mit der Einheit „kg“ verwendet wird. Eine mögliche Erklärung für die spezifische Wahl dieser Zahl ist die Vorstellung, bei der Berechnung der Einnahmen den „Preis mal die einzelne Menge“ zu rechnen. Diese Vorstellung wird bei ID 69 sichtbar.

Das Phänomen der Verwendung von $1(kg)\cdot p$ zeigt sich auch in jenen Bearbeitungen, welche innerhalb der Formel eine zusätzliche Rechenoperation aufweisen. Die Ergebnisse lassen ein Bestreben der Schüler:innen vermuten, durch den Ausdruck $1(kg)\cdot p$ zunächst die Einnahmen für ein Kilo zu berechnen, bevor sie die Multiplikation mit der Gesamtmenge vornehmen (vgl. ID 112). Die zeitlich sukzessive Struktur des Arbeitsprozesses bietet eine mögliche Erklärung für die einheitliche Klammersetzung in der Form $(1\,kg\cdot p)\cdot 12$ in den Antworten. Zudem kann die Verwendung überflüssiger Klammern durch Schüler:innen als Mittel zur Konstruktion innerer Bedeutung und Verdeutlichung von Beziehungen verstanden werden (Papadopoulos, 2023). In diesem Kontext können jene Antworten, die dem Fehlermuster *Einheit und Zahl statt 12* zugeordnet werden, als ein erster „Teilschritt“ innerhalb des Bearbeitungsprozesses interpretiert werden.

5.5 kg statt 12, x oder x und Einheit statt Zahl

Die Ergebnisse des Fehlermuster *kg statt 12* (Abschn. 4.2) deuten darauf hin, dass die Lernenden die Menge an Erdbeeren als variabel auffassen. Einige Schüler:innen äußern explizit, dass unklar sei, ob die gesamte Menge verkauft werde. Vor diesem Hintergrund erscheint es nachvollziehbar, die Zahl durch eine Variable zu ersetzen. Bereits Tietze (1988) weist darauf hin, dass Schüler:innen Variablen unter anderem auf die Darstellung als Einheit – hier auf die Einheit „kg“ – beschränken. In weiteren Ergebnissen ist ersichtlich, dass Lernende in ihren Erklärungen Wortvariablen oder umgangssprachliche Formulierungen verwenden. Dies kann die Wahl von „kg“ als Variable erklären, da Buchstaben in ihrer funktionalen Verwendung prinzipiell nicht von Wortvariablen abweichen (Fischer & Malle, 2004).

Ein weiterer Aspekt, welcher in den notierten Gedankengängen ersichtlich wird, ist die Auffassung der Variable als Platzhalter (vgl. ID 228). Diese Äußerungen von Schüler:innen stützen die Vermutungen von Plangg et al. (2022), wonach bei diesem Fehlermuster der Einsetzungsaspekt von Variablen (Fischer & Malle, 2004) im Fokus steht.

Die Ergebnisse des Fehlermusters *x oder x und Einheit statt Zahl* (Abschn. 4.4) zeigen, dass einige Schüler:innen die Variable *x* eigenständig und informell definieren (vgl. ID 323). Aufgrund der fehlenden Angabe zur tatsächlich verkauften

Anzahl an Kilogramm formulieren die Lernenden in diesen Fällen eine inhaltlich angemessene und korrekte Lösung der Situation.

Die Ursachen dieses Fehlermusters scheinen somit ähnlich gelagert wie die Vorgehensweise der Verwendung von *kg* als Variable für die verkaufte Menge. Ein wesentlicher Unterschied könnte in einem ausgeprägteren Variablenverständnis der Lernenden liegen. Demnach wird eine Beschränkung der Variable auf die Einheit nicht mehr akzeptiert, sondern die Variable x als Darstellung für eine „allgemeine Zahl" verwendet (Tietze, 1988). Dieser Denkprozess könnte insbesondere jenen Schüler:innenlösungen zu Grunde liegen, in denen der Ausdruck $kg \cdot p$ durch $x \cdot p$ ersetzt wurde.

In beiden Fällen überwinden Schüler:innen zentrale Hürden des Mathematisierungsprozesses und scheitern – im Fall der Verwendung von *kg* als Variable für die verkaufte Menge – erst an der formalen Notation. Analog zu den Ergebnissen der repräsentativen Stichprobe von Plangg et al. (2022) zeigt sich auch in der vorliegenden Stichprobe, dass diese beiden Fehlermuster vorrangig bei leistungsstärkeren Schüler:innen auftreten. In 83,93 % derartiger Fälle erfolgt die Beurteilung der Schüler:innen nach den AHS-Standards, wobei 60,71 % der Schüler:innen eine AHS besuchen.

5.6 x als Unbestimmte

In den Ergebnissen des Fehlermuster *x als Unbestimmte* (Abschn. 4.8) wird erneut deutlich, dass die Lernenden bemüht sind, eine Definition für die Variable x zu formulieren. Aus diesen Festlegungen geht hervor, dass die Variable x in Übereinstimmung mit der Bedeutung der Variable p verwendet wird. Entsprechend sind Antworten in der Form von $12 \cdot x$ als korrekt zu werten. Die Verwendung der Variable x lässt sich möglicherweise auf eine im Unterricht erworbene Fixierung auf x als die standardmäßig verwendete Unbestimmte zurückführen (Plangg et al., 2022). Die Schüler:innenantwort „*p* ist der Preis, wie x" (ID 200) lässt diese Vermutung plausibel erscheinen. Diese Auffassung könnte auch jenen Bearbeitungen zugrunde liegen, in denen aus den notierten Gedankengängen keine Berücksichtigung der Variable p hervorgeht und stattdessen die Variable x durchgängig als unbestimmte Größe verwendet wird.

Die Ergebnisse weisen somit darauf hin, dass einige Schüler:innen aufgrund einer Festlegung der Bedeutung der Variable x eine fachlich korrekte Antwort abgeben und nicht – wie von Plangg et al. (2022) vermutet – beim Schritt der Notation im Mathematisierungsprozess scheitern, wenngleich einige Lösungen (z. B. ID 373, ID 200) darauf hinweisen, dass es dennoch an fachsprachlichen Kompetenzen mangelt.

6. Fazit und Ausblick

Die vorliegende Untersuchung verdeutlicht, dass sich die Fehlerprozesse der Lernenden beim Bearbeiten der Aufgabenstellung auf übergeordnete kognitive und kontextuelle Muster zurückführen lassen. Zentrale Erklärungsmuster umfassen dabei die Orientierung an eingeübten Verfahren (vgl. Hafner, 2012), ein mangelhaftes Operationsverständnis sowie eine problematische Verwendung mathematischer Notationsformen. Insbesondere die Strategie des Rechnens „auf die Einheitsgröße" – etwa auf ein Kilogramm – zeigt sich in mehreren Fehlermustern (u. a. *Unbestimmte im Nenner, Unbestimmte im Zähler, Einheit und Zahl statt 12*) und lässt auf eine habitualisierte Vorgehensweise der Schüler:innen schließen, die auf routinierte Lösungsansätze zurückgreifen, selbst wenn diese im gegebenen Kontext unangemessen sind.

Ein weiterer zentraler Befund betrifft das Phänomen der Kontextlosigkeit: In Anlehnung an Baruks (1989) Konzept der Kapitänsaufgaben wird bei verschiedenen Bearbeitungen – etwa im Fehlermuster *Rechnung* oder *Prozentrechnung* – deutlich, dass Schüler:innen mit vorgegebenen Zahlen schematisch operieren, ohne deren situativen Bezug zu prüfen. Diese Tendenz zum kontextunabhängigen Rechnen verweist auf ein tiefsitzendes schulisch geprägtes Lösungsschema, das auf das Ausführen von Rechenoperationen anstelle einer inhaltlichen Analyse der Sachsituation fokussiert ist. Auch hier erweist sich die mangelnde Integration von Rechenoperation und Sachverhalt als zentrales Hindernis im Mathematisierungsprozess.

Die Analyse zeigt darüber hinaus, dass ein defizitäres Verständnis mathematischer Operationen – insbesondere der Division – einen entscheidenden Beitrag zu mehreren Fehlermustern leistet. Die Ambivalenz im Umgang mit Rechenoperationen (vgl. *Unbestimmte im Zähler*) sowie das Schwanken zwischen verschiedenen Ausdrucksformen (z. B. $E = 12 \cdot p$ vs. $E = p : 12$) verdeutlichen ein wenig tragfähiges Verständnis der funktionalen Bedeutung von Rechenzeichen. Besonders das Gleichheitszeichen wird häufig operational – im Sinne eines Rechenbefehls – und nicht relational interpretiert, wie es u. a. im Fehlermuster *Rechnung* beobachtet werden konnte (vgl. Kieran, 2022; Tietze, 1988).

Hinsichtlich der Notation zeigt sich, dass Schüler:innen vielfach mit formalen Anforderungen ringen. Die Ergebnisse zu den Fehlermustern *kg statt 12*, *x statt Zahl* sowie *x als Unbestimmte* legen nahe, dass insbesondere leistungsstärkere Lernende den Mathematisierungsprozess inhaltlich korrekt vollziehen, jedoch an der standardisierten Notation scheitern. Die Fixierung auf bestimmte Variablenformen (etwa x) oder der Gebrauch von Einheiten als Variable spiegeln sowohl kreative Zugänge als auch systematische Schwierigkeiten im formalen Ausdruck wider. Die Beobachtung, dass in vielen Fällen neue Variablen eingeführt werden, ohne deren Bedeutung explizit zu definieren, unterstreicht die Relevanz einer gezielten Förderung einer korrekten mathematischen Ausdrucksweise.

Die Analyse der Fehlermuster eröffnet Perspektiven für die Weiterentwicklung mathematikdidaktischer Diagnostik und dahingehenden Lernumgebungen. Künftige Studien sollten auch gezielt der Frage nachgehen, welche Denk- und Lösungsschritte Lernende heranziehen, die den Mathematisierungskreislauf korrekt durchlaufen. Eine Analyse der Bearbeitungen der vorliegende Stichprobe zu dem Item "Erdbeeren" findet sich in Plangg & Jedinger (2026).

Zudem könnte durch Varianten der Aufgabenstellung, etwa durch ergänzende Tabellen, eine explizitere Strukturierung des Bearbeitungsprozesses erreicht werden. Dies würde sowohl die heuristische Orientierung der Schüler:innen unterstützen als auch wertvolle Rückschlüsse über deren Verständnisprozesse ermöglichen.

Als wesentliche Limitation der vorliegenden Studie ist die ausschließlich schriftliche Erhebung der Lösungsschritte und Gedankengänge im Bearbeitungsprozess zu nennen. Mögliche unzureichende sprachliche Fähigkeiten der Schüler:innen könnten dazu führen, dass sie ihre Überlegungen nicht nachvollziehbar verschriftlichen und auf diese Weise nur ein unzureichender Einblick in ihre Gedanken und Lösungsschritte gewährt wird. Dennoch ermöglichen die Dokumentationen der Lernenden die Bearbeitung des ursprünglichen Forschungsdesiderats und es konnten aufgrund von 92 Bearbeitungen mögliche Fehlerprozesse für die bekannten Fehlermuster identifiziert werden.

Aus einer übergeordneten Perspektive veranschaulicht die vorliegende Studie exemplarisch die Vielfalt möglicher Fehlerprozesse im Kontext einer einzelnen Aufgabenstellung sowie die daraus resultierende Relevanz ihrer systematischen Analyse. Insbesondere für Lehrpersonen zeigen die Ergebnisse die Bedeutsamkeit der Auseinandersetzung mit Fehlerprozessen auf, um Einblicke in bestehende Fehlvorstellungen von Lernenden zu gewinnen und im Unterricht gezielt darauf reagieren zu können.

Literaturverzeichnis

Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik* (G. Hergott, Übers.). Springer Basel AG.

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *Mathematik lehren*(128), 18–21.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (S. 145–157). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Verordnung des Bundesministers für Bildung, Wissenschaft und Forschung über Bildungsstandards im Schulwesen (Bildungsstandardsverordnung – BiStV). https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166&ShowPrintPreview=True

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 29–57. https://doi.org/10.1007/s13138-011-0031-5

Fischer, R. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (Neuauflage, gedruckt nach Typoskript). *Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik (Bd. 5)*. Profil-Verlag.

Förster, F. (1997). Anwenden, Mathematisieren, Modellbilden. In U.-P. Tietze, M. Klika & H. Wolpers (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis* (2., durchges. Aufl., S. 121–150). Springer Fachmedien.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Auflage). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2. Aufl.). *Klett-Studienbücher Mathematik*. Klett.

Führer, L. (2004). Fehler als Orientierungsmittel: Vom respektvollen Umgang mit Fehlleistungen. *mathematik lehren* (125), 4–8.

Gerster, H.-D. & Grevsmühl, U. (1983). Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen. *Pädagogische Welt*, *37*(11), 654–660.

Gloy, K. (1987). Fehler in normentheoretischer Sicht. *Zeitschrift für Unterricht, Wissenschaft und Politik*, *9*, 190–204.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 11–38). Springer Fachmedien.

Greefrath, G. & Maaß, K. (2020). Diagnose und Bewertung beim mathematischen Modellieren. In G. Greefrath & K. Maaß (Hrsg.), *Modellierungskompetenzen – Diagnose und Bewertung* (S. 1–20). Springer Spektrum.

Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen (Perspektiven der Mathematikdidaktik)*. Vieweg+Teubner.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik* (Dr. nach Typoskript). *Reihe Pädagogik*. Beltz.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2023). Mathematisches Modellieren. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Auflage, S. 399–428). Springer Spektrum.

Keller, R. (1980). Zum Begriff des Fehlers im muttersprachlichen Unterricht. In D. Cherubim (Hrsg.), *Reihe germanistische Linguistik: Bd. 24. Fehlerlinguistik: Beiträge zum Problem der sprachlichen Abweichung* (S. 23–42). Niemeyer.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg+Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-322-89561-5

Oser, F., Hascher, T. & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern Zur Psychologie des „negativen" Wissens. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten: Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlaß des 60. Geburtstags von Fritz Oser* (S. 11–41). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Padberg, F. (1996). Aus Fehlern lernen. Den Mathematikunterricht durch Fehleranalysen verbessern. *Friedrich-Jahresheft*(XIV: Prüfen und beurteilen), 56–59.

Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik* (2. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43449-9

Papadopoulos, I. (2023). Primary school students' use of unnecessary brackets while evaluating arithmetic expressions. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Herendiné-Kónya (Vorsitz), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Symposium im Rahmen der Tagung von Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME, Budapest, Ungarn.

Plangg, S., & Jedinger, I. (2026). Wenn Mathematisieren gelingt – Eine qualitative Studie zu Denk- und Prozessschritten von Schüler*innen der Sekundarstufe 1 beim Mathematisieren einer Sachsituation. *Mathematik im Unterricht*, 16, 61–71.

Plangg, S., Stampfer, F. & Fuchs, E. (2022). Eine Aufgabe, viele Fehler – Ergebnisse einer qualitativen Analyse zum Mathematisieren auf der Sekundarstufe 1 und Implikationen für die Unterrichtspraxis. In A. C. George, S. Götz, M. Illetschko & E. Süss-Stepancik (Hrsg.), *Kompetenzmessungen im österreichischen Schulsystem: Analysen, Methoden & Perspektiven: Bd. 3. Empirische Befunde zu Kompetenzen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und Folgerungen für die Praxis: Ergänzende Analysen zu den Bildungsstandardüberprüfungen* (1. Auflage, S. 259–292). Waxmann.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich? [Learning from errors – (how) is this possible?]. *PM : Praxis der Mathematik in der Schule*, *51*(27), 1–8.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Vieweg.

Rudolf vom Hofe & Jürgen Roth (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren*, *2023*(236), 2–7. https://elibrary.utb.de/doi/10.5555/ml-236-2023_01

Schulz, A., Leuders, T. & Rangel, U. (2017). Arithmetische Basiskompetenzen am Übergang zu Klasse 5 – eine empirie- und modellgestützte Diagnostik als Grundlage für spezifische Förderentscheidungen. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Pädagogik. Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Auflage, S. 396–417). Beltz.

Selter, C. (1994). Jede Aufgabe hat eine Lösung: Vom rationalen Kern irrationalen Vorgehens. *Grundschule*(3), 20–22.

Tietze, U.-P. (1988). Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik: Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *9*(2/3), 163–204.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (Hrsg.). (1997). *Didaktik der Mathematik*. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis* (2., durchges. Aufl.). Springer Fachmedien.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (61), 37–46.

Wittmann, G. (2007a). Fehleranalysen in der Bruchrechnung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3. 2007 in Berlin* (S. 173–178). Franzbecker. https://doi.org/10.17877/DE290R-11192

Wittmann, G. (2007b). Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007: Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3. 2007 in Berlin* (S. 175–178). Franzbecker.